Wstęp. Liczby naturalne (więcej w: W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wykłady ze wstępu do matematyki* i książce J. Cichonia)

Liczby naturalne możemy wprowadzić aksjomatycznie: (Peano) *Liczby naturalne* to zbiór $\mathbb{N}$ z wyróżnionym elementem 0 nazywanym zerem oraz funkcją $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazywaną *funkcją następnika* o następujących własnościach:

1. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} S(n) \neq 0$.
2. S jest różnowartościowa.
3. (zasada indukcji zupełnej (ZIZ)) Jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz $0 \in A$, $\bigwedge_{n\in A} S(n) \in A$, to $A = \mathbb{N}$.

Wartość $S(n)$ nazywamy następnikiem liczby n i oznaczamy n' (n' to to samo co $n+1$, ale dodoawania jeszcze nie określilismy!). Liczby $0'$, $0''$, $0'''$, $0''''$ oznaczamy jak zwykle 1, 2, 3, 4.

Twierdzenie 1 (o definiowaniu przez indukcję) *Niech będzie dany niepusty zbiór A oraz niech będzie dany element a_0 zbioru A. Niech $\varphi : A \to A$. Wówczas istnieje jedyna funkcja $f\colon \mathbb{N} \to A$ o następujących własnościach:*

(α) $f(0) = a_0$;

(β) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f(n') = \varphi(f(n))$.

Zamiast dowodzić tego twierdzenia, zobaczmy jak ono działa. Kolejne wartości funkcji f, to $a_1 = f(1) = \varphi(a_0)$, $a_2 = f(2) = \varphi(f(1)) = \varphi(\varphi(a_0))$, $a_3 = \varphi(f(2)) = \varphi(\varphi(\varphi(a_0))), \ldots$. O ciągu f mówimy, że jest zdefiniowany indukcyjnie względnie, że jest ciągiem rekurencyjnym. Ciągiem takim jest np. $(2^n : n \in \mathbb{N})$, bo może możemy go określić przyjmując: $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_0 = 1$ oraz $\varphi(n) = 2n$.

Za pomocą przytoczonego twierdzenia możemy określić porządek w $\mathbb{N}$. Niech tym razem $A = \mathbb{N}$, $\varphi = S$ (funkcja następnika) i niech a_0 będzie dowolna liczbą naturalną k. Określmy $f = f_k$ jak w twierdzeniu: $f_k(0) = a_0 = k$, $f_k(n') = S(f_k(n))$. (To znaczy, naszą intencją jest, by $f_k(n) = n+k$, jednak wszystko chcemy wprowadzić idąc jedynie od zdefiniowanych pojęć, a dodawania liczb naturalnych jeszcze nie określiliśmy.) Relację porządku $\leqslant$ w $\mathbb{N}$ definiujemy tak: dla każdej pary liczb naturalnych (p, q) przyjmujemy:

$$p \leqslant q \Leftrightarrow p = q \text{ lub } q \text{ jest wartością funkcji } f_p.$$

Można sprawdzić, że $\leqslant$ jest rzeczywiście relacją porządku liniowego na $\mathbb{N}$.

Twierdzenie 2 *$\leqslant$ na $\mathbb{N}$ jest porządkiem dobrym.*

Dowód. Weźmy dowolny podzbiór $B \subseteq \mathbb{N}$. Musimy wykazać, że jeśli jest on niepusty, to ma element najmniejszy. Jeśli $0 \in B$, to 0 jest szukanym elementem jako, że w świetle definicji $\leqslant$ jest najmniejszym elementem w $\mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $0 \notin B$. Określmy zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ następująco: $A = \{n \in \mathbb{N} \bigwedge_{k\leqslant n} k \notin B\}$. Oczywiście $0 \in A$. Gdyby dla każdego $n \in A$ także $n' \in A$. To w świetle ZIZ $A = \mathbb{N}$, co nie jest możliwe , bo A i B są rozłączne a B jest niepusty. Istnieje więc $n \in A$, że $n' \notin A$, wtedy jednak $n' \in B$ i n' jest szukanym najmniejszym elementem zbioru B. $\square$.

Twierdzenie o definiowaniu przez indukcję jest najprostszym z całego szeregu takich twierdzeń i daleko niewystarczającym do wszystkich zastosowań. Zamiast formułować inne twierdzenia tego rodzaju przytoczę kilka przykładów.

Przykład 1 (Indukcyjne określenie dodawania liczb naturalnych) Dodawanie określamy za pomocą następujących reguł:

(A) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} n + 0 = n;$

(B) $\bigwedge\limits_{n,m\in\mathbb{N}} n + m' = (n + m)'$

Należy to rozumieć w ten sposób, że istnieje jedyna funkcja $F\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że

$$\bigwedge_{n,m\in\mathbb{N}} F(n, 0) = n \wedge F(n, m') = F(n, m)'.$$

Istnienie wymaga trochę pracy i nie będziemy się nim zajmować. Jedyność jest łatwa. Przypuśćmy, że mamy jeszcze jedną funkcję G spełniającą powyższy warunek. Dla $m \in \mathbb{N}$ określmy zbiór $X_m = \{n \in \mathbb{N}\colon F(n, m) = G(n, m)\}$. Zauważmy, że wobec tego iż $F(n, 0) = n = G(n, 0)$, $X_0 = \mathbb{N}$. Niech $A = \{m \in \mathbb{N} : X_m = \mathbb{N}\}$. Element 0 należy więc do A. Przypuśćmy, że $m \in A$, to znaczy, że $X_m = \mathbb{N}$ i stąd dla każdego n, $F(n, m) = G(n, m)$. Stąd z kolei dla każdego n mamy $F(n, m)' = G(n, m)'$. Jednak wtedy wobec definicji funkcji F i G, $F(n, m') = G(n, m')$ dla każdego n, co oznacza, że $X_{m'} = \mathbb{N}$ lub równoważnie $m' \in A$. Wobec ZIZ, $A = \mathbb{N}$, a to oczywiście oznacza, że $F = G$. $\square$

Przykład 2 (ciąg Fibonacciego) Określmy ciąg $(a_n\colon n \in \mathbb{N})$ przyjmując $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ oraz określając kolejne jego wyrazy za pomocą reguły rekurencyjnej:

$$\bigwedge_n a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{(równoważnie: } a_{n''} = a_{n'} + a_n).$$

Obliczmy kolejne wyrazy ciągu: $a_2 = a_1 + a_0 = 1+1 = 2$, $a_3 = a_2 + a_1 = 2+1 = 3$, $a_4 = a_3 + a_2 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13, \ldots$, $a_{32} = 3524578$, $a_{33} = 5702887$, $a_{34} = 9227465$, $a_{35} = 14930352$. Ile wynosi a_{37}? Wykaż, że $a_n < 2^n$, dla $n \geqslant 1$.

Zauważmy, że reguła określająca kolejny wyraz ciagu Fibonacciego zależy od dwu wyrazów poprzedzających. Oczywiście ciąg może być określony regułą według której, kolejny wyraz zależy od k poprzedzających. Wtedy pierwszych k wyrazów ciągu musi być zadanych.

Przykład 3 (ciągi Collatza) Niech c_0 oznacza dowolną niezerową liczbę naturalną. Kolejne wyrazy ciągu określamy za pomocą rekurencji:

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{c_n}{2}, & \text{jeśli } c_n \text{ jest parzysta} \\ 3c_n + 1, & \text{jeśli } c_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Hipoteza postawiona przez Collatza głosi, że każy ciąg $(c_n \colon n \in \mathbb{N})$ musi mieć 1 pośród swoich wartości. Np. jeśli przyjąć $c_0 = 15$, to $c_{17} = 1$. Więcej na ten temat zawiera hasło *Problem Collatza* w wikipedii.

ZIZ ma wiele równoważnych sformułowań, jedno z nich nosi nazwę zasady indukcji matematycznej (ZIM):

Dano ciąg zdań $(\varphi_n \colon n \in \mathbb{N})$ jeśli wiemy, że φ_0 jest zdaniem prawdziwym oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe jest zdanie $\varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1}$, to wszystkie zdania są prawdziwe.